I-Définition et propriétés :

1/ Définition :

Une application du plan dans lui-même est une isométrie si elle conserve les distances.
C'est-à-dire pour tout points M et N d'images respectives M' et N'on a : M' N' = MN

* Point fixe :
Soit f une application du plan dans lui-même et I un point du plan, on dit que I est fixe par f (ou I est invariant par f). Si f (I) = I
* Les images de deux points distincts par une isométrie sont deux points distincts.

2/ Isométrie et produit scalaire :

Théorème :

Une application du plan dans lui-même est une isométrie si et seulement si elle conserve le produit scalaire.
C'est –à-dire : pour trois points A, B et C d'images respectives A', B' et C'
on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$.

Conséquences :

(1) Soit f une isométrie du plan. A, B et C trois points distincts du plan d'images respectives A',B' et C' par f on a : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.
On dit qu'une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.
(2) Les images par une isométrie de trois points non alignés sont trois points non alignés.

Théorème :

Soit f une isométrie du plan A, B et C trois points non alignés du plan d'images respectives A', B' et C' par f .
$\longrightarrow$ Si $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé alors $(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ est un repère orthonormé.
$\longrightarrow$ Si pour tout point M du plan d'image M' par f $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$, avec α et β des réels alors $\overrightarrow{A'M'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'} + \beta\,\overrightarrow{A'C'}$

Théorème :

Toutes isométrie f du plan est une bijection et sa réciproque est une isométrie notée : f^{-1}

Conséquences :

- Pour toute isométrie f et tout point M du plan $f(M) = N \Leftrightarrow f^{-1}(N) = M$
- Une symétrie orthogonale est une isométrie et sa réciproque est elle –même.
- Une symétrie centrale est une isométrie et sa réciproque est elle –même.
- Une translation de vecteur $\vec{u}$ est une isométrie et sa réciproque et la translation de vecteur $\vec{u}$.
- Une rotation de centre I et d'angle α est une isométrie et sa réciproque est une rotation de centre I et d'angle $-\alpha$.

Théorème :

Soit f une isométrie et A,B,C et D quatre points d'images respectives A',B',C' et D' par f :
Si $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\overrightarrow{CD}$ avec α un réel alors $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\,\overrightarrow{C'D'}$

3/ Isométries et configurations :

- Une isométrie conserve le barycentre de deux points en particulier : une isométrie conserve le milieu d'un segment.
- L'image d'une droite par une isométrie est une droite.
- L'image d'un segment par une isométrie est un segment qui lui est isométrique.
- L'image par une isométrie
- de deux droites parallèles sont deux droites parallèles (conservation du parallélisme)
- deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires (conservation de l'orthogonalité)
- d'un cercle est un cercle qui lui est isométrique
- de la tangente à un cercle en un point M est la tangente au cercle image au point M' image de M (conservation du contact)

II- Composition d'isométries :

Théorème :

La composée de deux isométrie est une isométrie.

Théorème :

La composée de deux symétrie orthogonales d'axes sécants est une rotation. C'est –à-dire :

Si Δ et Δ' deux droites sécantes en un point I alors $\begin{cases} S_{\Delta'}.\circ S_{\Delta} = r_{(I,2(\vec{u},\vec{u}'))} \\ \text{avec } \vec{u} \text{ directeur de } \Delta \text{ et } \vec{u}' \text{ directeur de } \Delta' \end{cases}$

Remarque :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en I est une symétrie centrale de centre I.

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation. C'est –à-dire :
soit Δ et Δ deux droites parallèles

$S_{\Delta'} o S_{\Delta} = t_{2\vec{u}}$ avec $\begin{cases} \overrightarrow{u} \text{ normal à } \Delta \\ t_{\vec{u}}(\Delta) = \Delta' \end{cases}$

Théorème :

Soient f et g deux isométries. f °g = Id (ou Id est l'identité du plan)si et seulement si $g = f^{-1}$

Propriétés :

Soient f, g et h trois isométries

(1) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

(2) $f = g \Leftrightarrow h \circ f = h \circ g$

III- Isométries et points fixes :

Théorème :

Soit f une isométrie différente de l'identité, A un point non fixe par f d'image A'
Si M est fixe par f alors M est sur la médiatrice du segment $[AA']$

Théorème :

Une isométrie qui fixe trois points non alignés est l'identité du plan.

Conséquences :

Deux isométries qui coïncident sur trois points non alignés sont identiques .
Donc une isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignée et leurs images.

Théorème :

Si f une isométrie fixe deux points distincts A et B
(1) Alors elle fixe tous les points de la droite (AB)
(2) Si de plus elle est différente de l'identité alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB)

Théorème :

Si f est une isométrie qui fixe un unique point I alors f est une rotation de centre I et d'angle non nul.

IV- Isométries sans points fixes :

Théorème :

Soit f une isométrie et O un point. f se décompose d'une manière unique en une translation et une isométrie g qui fixe O. Donc $f = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g$ avec g (O) = O et f (O) = O'

Théorème :

Toute isométrie qui n'a aucun point fixe est soit une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ soit la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ et tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ.

Définition :

La composé d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ s'appelle une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.
Donc : si f est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ alors $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ c'est la forme réduite de f d'où $f \circ f = t_{2\vec{u}}$

V- Décomposition d'une isométrie :

Théorème :

Toute isométrie se décompose en symétrie orthogonales.

(1) Les rotations

$$R_{(I,\theta)} = S_{D'} \circ S_D \text{ avec } \begin{cases} D \cap D' = \{I\} \\ 2(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \theta\ [2\pi] \\ \vec{u} \textit{ directeur de } D \\ \vec{u}' \textit{ directeur de } D' \end{cases}$$

Remarque :

S_I : symétrie centrale de centre I.
$S_I = S_{D'} \circ S_D$ avec D et D' deux droites perpendiculaires en I.

(2) Les translations :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$ avec $\vec{u}$ normal à D et $D' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$

Tableau récapitulatif

Nature de l'isométrie	Décomposition en symétrie orthogonales	Ensemble de points fixes
Id	$S_{D'} \circ S_D$	Tout le plan
Symétrie orthogonale d'axe D	S_D	La droite D
Rotation de centre I et d'angle $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$S_{D'} \circ S_D$ ($D \cap D' = \{I\}$)	$\{I\}$
Translation de vecteur non nul	$S_{D'} \circ S_D$ ($D \cap D' = \varnothing$)	$\varnothing$
Symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\vec{u}$	$S_{D''} \circ S_{D'} \circ S_D \begin{cases} D \cap D' = \varnothing \\ D \perp D'' \end{cases}$	$\varnothing$